וקטורים אלגבריים – מכפלה סקלרית

☺ איך כופלים וקטור בווקטור בגישה האלגברית?

תלת ממדי	דו ממדי
$\underline{a} = (a_1,a_2,a_3) \quad \underline{b} = (b_1,b_2,b_3)$	$\underline{a} = (a_1,a_2) \quad \underline{b} = (b_1,b_2)$
$\underline{a} \cdot \underline{b} = \_\_\cdot\_\_ + \_\_\cdot\_\_ + \_\_\cdot\_\_$	$\underline{a} \cdot \underline{b} = \_\_\cdot\_\_ + \_\_\cdot\_\_$

1. נתון: $\underline{b} = (1, -3, 2)$ $\underline{a} = (5, 0, -4)$. חשבו את ערך $\underline{a} \cdot \underline{b}$.

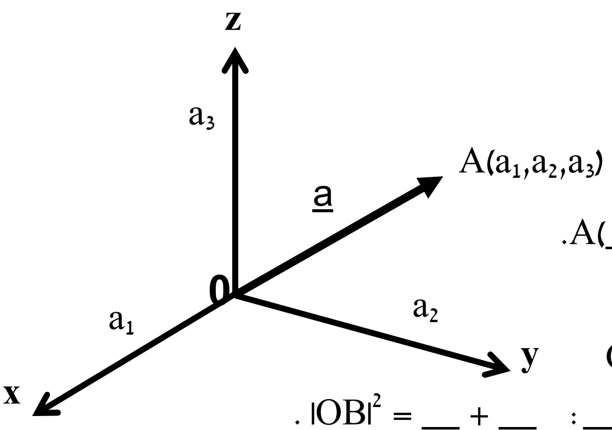
♦ $\underline{a} \cdot \underline{b} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_$

☺ בגישה הגיאומטרית ראינו: $|\underline{a}|^2 = \underline{a} \cdot \underline{a}$ ($|\underline{a}|$ - אורך הווקטור $|\underline{a}|$). האם גם בגישה האלגברית החוק הזה מתקיים?

♦ נראה לגבי תלת מימד: יהי $\underline{a} = (a_1,a_2,a_3)$. ←

$\underline{a} \cdot \underline{a} = (\_\_,\_\_,\_\_) \cdot (\_\_,\_\_,\_\_)$ ← $\underline{a} \cdot \underline{a} = \_\_\_\_ + \_\_\_\_ + \_\_\_\_$ ← $\underline{a} \cdot \underline{a} = \_\_ + \_\_ + \_\_$

♦ השאלה היא האם: $|\underline{\mathbf{a}}|^2 = \mathbf{a_1}^2 + \mathbf{a_2}^2 + \mathbf{a_3}^2$?



בשרטוט משמאל יש מערכת צירים תלת ממדית

ובה הווקטור האלגברי $\underline{a}$.

זנב הווקטור $\underline{a}$ ב ______ וראשו בנקודה $A(\_\_,\_\_,\_\_)$.

נחשב את אורכו של $\underline{a}$, כלומר את $|\underline{a}|$.

הוסיפו לשרטוט את הנקודות $B(a_1,a_2,0)$ ו $C(a_1,0,0)$

משולש OBC ישר זווית, לכן לפי משפט __________ : $|OB|^2 = \_\_ + \_\_$.

משולש OAB ישר זווית, לכן לפי משפט __________ : $|OA|^2 = \_\_ + \_\_ + \_\_\_$

← $|\underline{a}|^2 = \_\_^2 + \_\_\_ + \_\_\_$

נפלא.

♦ למדנו לכפול שני וקטורים זה בזה כאשר הווקטורים מופיעים בהצגה אלגברית.

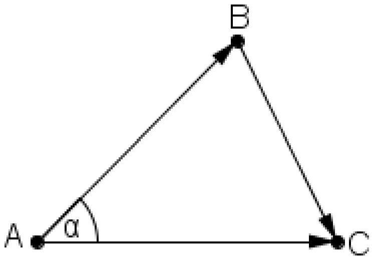
♦ למדנו לכפול שני וקטורים זה בזה כאשר הווקטורים מופיעים בהצגה גיאומטרית.

♦ נציג שאלה מעניינת....

☺ נתונים הווקטורים $\underline{b}=(b_1,b_2,b_3)$ $\underline{a}=(a_1,a_2,a_3)$. תהי α הזווית בין שני הווקטורים.

בהצגה גיאומטרית $\underline{a}\cdot\underline{b}=$ ______________. בהצגה אלגברית: $\underline{a}\cdot\underline{b}=$ ______________.

האם תוצאת המכפלה תהיה שווה אם נכפול את הווקטורים לפי שתי הגדרות?



♦ נסמן: $\overrightarrow{AC}=\underline{b}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{a}$. ← $\overrightarrow{BC}=$ _____

שיעורי $\overrightarrow{BC}$ הם: $\overrightarrow{BC}=(\_\_-\_\_,\_\_-\_\_,\_\_-\_\_)$

♦ נבטא את אורכי הווקטורים באמצעות השיעורים שלהם:

$|\underline{a}|^2=\_\_+\_\_+\_\_$, $|\underline{b}|^2=\_\_+\_\_+\_\_$

ו $|\overrightarrow{BC}|^2=|\underline{b}-\underline{a}|^2=(\_\_-\_\_)^2+(\_\_-\_\_)^2+(\_\_-\_\_)^2$ (הוכחנו נכונות בדף קודם).

♦ לפי משפט הקוסינוסים במשולש ABC: $|\overrightarrow{BC}|^2=|\_\_|^2+|\_\_|^2-2\cdot|\_|\cdot|\_|\cdot\cos\alpha$

♦ מכאן: $|\overrightarrow{BC}|^2=|\underline{b}-\underline{a}|^2$

לפי הגדרה אלגברית — לפי משפט הקוסינוסים

♦ בשל השוויון מתקבלת המשוואה:

______________________________ = ______________________________

♦ נפתח סוגריים ונצמצם בשני האגפים. נקבל: ______________ = ______________

אגף ימין שווה ל $\underline{a}\cdot\underline{b}$ לפי הגדרה _________ .

אגף שמאל שווה ל $\underline{a}\cdot\underline{b}$ לפי הגדרה _______. ושני האגפים שווים זה לזה.

☺ בתרגילים הבאים נשלש בין הגדרת מכפלה סקלרית בהצגה גיאומטרית והגדרת מכפלה סקלרית בצורה האלגברית.

למדנו ש: $\underline{a}\cdot\underline{b}=|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|\cdot\cos\alpha$ ← $\cos\alpha=\dfrac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|}$ כאשר α היא הזווית שבין $\underline{a}$ ל $\underline{b}$.

2. מצאו וקטור המאונך לוקטורים: (3,4,0) , (1,2,2).

♦ יהי (a,b,c) הווקטור המבוקש.

1. $0 = (\_\_,\_\_,\_\_)\cdot(\_\_,\_\_,\_\_)$ לכן $0 = \_\_ + \_\_ + \_\_$
2. $0 = (\_\_,\_\_,\_\_)\cdot(\_\_,\_\_,\_\_)$ לכן $0 = \_\_ + \_\_$

____

♦ קיבלנו שתי משוואות ב_______ נעלמים. נציב במשוואה השנייה $a = 4$. ←
$b = \_\_\_$, $c = \_\_$ ← הווקטור המבוקש הוא (__,__,__).

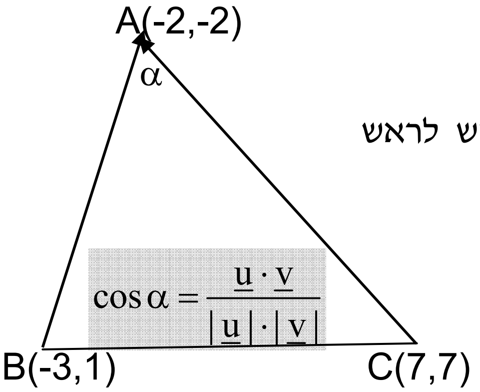
♦ לו בחרנו בערך שונה ל a, היינו מקבלים וקטור שונה בתשובה. נכון / לא נכון.

♦ כל וקטור שהיינו מקבלים היה תלוי בווקטור התשובה שקיבלנו. נכון / לא נכון.

3. נתונות הנקודות: A(-2,-2), B(-3,1), C(7,7).
א. הוכח שהנקודות יוצרות משולש.
ב. מצא את זוויות המשולש.

♦ א. נוכיח בדרך השלילה.אם הווקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו $\overrightarrow{AC}$ יהיו על אותו הישר, הם יהיו תלויים זה בזה. $\overrightarrow{AB} = \_\_ - \_\_ = (\_\_ . \_\_)$, $\overrightarrow{AC} = \_\_ - \_\_ = (\_\_ . \_\_)$
הווקטורים ___ , ____ __________________ לכן __________________

♦ ב. הזוויות בין הווקטורים (הזווית בין וקטורים היא הזווית שבין ___________ או ___________.



♦ נסמן $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$.
בחישוב הזווית יש לבנות את הווקטורים בהתאם (ראש לראש או זנב לזנב).

♦ חישוב cosα: ← $\alpha = \_\_\_$

♦ חישוב cosβ: ← $\beta = \_\_\_$

♦ חישוב cosγ: ← $\gamma = \_\_\_$

☑ מאגר תשובות 1. 3- 2. (4 , -3 , 1). נכון. נכון
3. $\alpha = 63.43^0$, $\beta = 102.52^0$, $\gamma = 14.05^0$

עבודה נעימה