מכפלה סקלרית – גישה גיאומטרית

☺ למדנו לחבר ולחסר שני וקטורים, למדנו לכפול וקטור בסקלר.
נלמד לכפול שני וקטורים זה בזה.

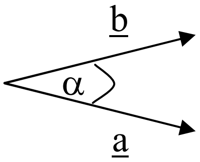
☺ **מכפלה סקלרית**: מכפלת שני וקטורים זה בזה.
איך כופלים שני וקטורים זה בזה?

$|\underline{a}|$ = אורך הווקטור $\underline{a}$.

☺ $\underline{a}$ ו $\underline{b}$ הם שני וקטורים בעלי ראש או זנב משותפים. α היא הזווית ביניהם.

נגדיר: $\underline{\mathbf{a}}\cdot\underline{\mathbf{b}} = |\underline{\mathbf{a}}|\cdot|\underline{\mathbf{b}}|\cdot\cos\alpha$

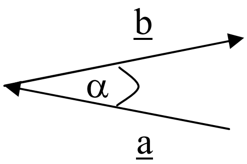
♦ במילים: **המכפלה הסקלרית של שני וקטורים שווה למכפלת האורכים של וקטורים זה בזה כפול קוסינוס הזווית שבין הווקטורים.**



1. נתון $|\underline{a}| = 3$, $|\underline{b}| = 5$, $\alpha = 60^0$. חשבו את ערך $\underline{a}\cdot\underline{b}$.

♦ האם α היא הזווית בין הווקטורים $\underline{a}$ ו $\underline{b}$? כן / לא
אם לא – מהי הזווית בין הווקטורים $\underline{a}$ ו $\underline{b}$?

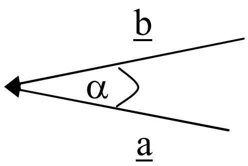
♦ $\underline{a}\cdot\underline{b}$ = ___·___·____



2. נתון $|\underline{a}| = 3$, $|\underline{b}| = 5$, $\alpha = 60^0$. חשבו את ערך $\underline{a}\cdot\underline{b}$.

♦ האם α היא הזווית בין הווקטורים $\underline{a}$ ו $\underline{b}$? כן / לא
אם לא – מהי הזווית בין הווקטורים $\underline{a}$ ו $\underline{b}$?

♦ $\underline{a}\cdot\underline{b}$ = ___·___·____



3. נתון $|\underline{a}| = 3$, $|\underline{b}| = 5$, $\alpha = 60^0$. חשבו את ערך $\underline{a}\cdot\underline{b}$.

♦ האם α היא הזווית בין הווקטורים $\underline{a}$ ו $\underline{b}$? כן / לא
אם לא – מהי הזווית בין הווקטורים $\underline{a}$ ו $\underline{b}$?

♦ $\underline{a}\cdot\underline{b}$ = ___·___·____

☺ תכונות המכפלה הסקלרית:

א. חוק החילוף: $\underline{a}\cdot\underline{b} = \underline{b}\cdot\underline{a}$

ב. חוק הפילוג: $\underline{a}\cdot(\underline{b} + \underline{c}) = \underline{a}\cdot\underline{b} + \underline{a}\cdot\underline{c}$

ג. יהי t סקלר: $t(\underline{a}\cdot\underline{b}) = \underline{a}\cdot t\underline{b}$

4. תנו דוגמה לחוקים א – ג של המכפלה הסקלרית.

☺ הזווית בין וקטורים שווי כיוון = 0^0.

5. מהו ערך הזווית של וקטור עם עצמו?

✎ משפט: $\underline{a}\cdot\underline{a} = |\underline{a}|^2$ (במילים: אורך וקטור בריבוע = כפל הווקטור בעצמו).

♦ לפי הגדרת מכפלה סקלרית $\underline{a}\cdot\underline{a} = |\_\_|\cdot|\_\_|\cdot\_\_\_$ ← $\underline{a}\cdot\underline{a} = \_\_$ מ.ש.ל.

♦ נוסח שונה: $|\underline{a}| = \sqrt{\_\_\_}$

6. $|\underline{a}| = 2$, $|\underline{b}| = 1$. הזווית בין $\underline{a}$ ל $\underline{b}$ היא בת 60^0. נחשב את המכפלה הסקלרית:
$(\underline{a}+\underline{b})(\underline{a}-\underline{b})$

♦ נפתח סוגריים (נוסחת הכפל המקוצר): $(\underline{a}+\underline{b})(\underline{a}-\underline{b}) = \_\_\_ - \_\_$.

$\underline{a}\cdot\underline{a} = \_\_$, $\underline{b}\cdot\underline{b} = \_\_$ ← $(\underline{a}+\underline{b})(\underline{a}-\underline{b}) = \_\_\_ - \_\_\_ = \_\_\_$.

7. $|\underline{a}| = 2$, $|\underline{b}| = 3$. הזווית בין $\underline{a}$ ל $\underline{b}$ היא בת 60^0. נחשב את המכפלה הסקלרית:
$(2\underline{a}+3\underline{b})(\underline{a}-\underline{b})$

♦ פתיחת סוגריים: $(2\underline{a}+3\underline{b})(\underline{a}-\underline{b}) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

$\underline{a}\cdot\underline{a} = \_\_$, $\underline{b}\cdot\underline{b} = \_\_$, $\underline{a}\cdot\underline{b} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

$(2\underline{a}+3\underline{b})(\underline{a}-\underline{b}) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_$

8. $|\underline{a}| = 2$, $|\underline{b}| = 3$. הזווית בין $\underline{a}$ ל $\underline{b}$ היא בת 120^0. נחשב את ערך: $|\underline{a}+\underline{b}|$.

♦ $|\underline{a}+\underline{b}| = \sqrt{(\_\_+\_\_)(\_\_+\_\_)} = \sqrt{\_\cdot\_+2\_\cdot\_+\_\cdot\_}$

♦ $\underline{a}\cdot\underline{a} = \_\_$, $\underline{b}\cdot\underline{b} = \_\_$, $\underline{a}\cdot\underline{b} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

$|\underline{a}+\underline{b}| = \sqrt{\_\_\_}$

9. האם חוק הצמצום חל במכפלה סקלרית ?

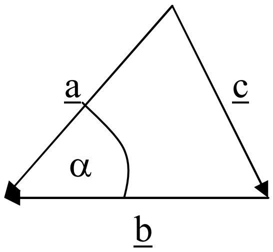
הסבר: נתון: $\underline{a}\cdot\underline{b} = \underline{a}\cdot\underline{c}$,$\underline{a} \neq \underline{0}$ האם ניתן להסיק ש: $\underline{b} = \underline{c}$?

הוכיחו או הביאו דוגמא נגדית.

☺ נזכיר: $\underline{a}\cdot\underline{a} = |\underline{a}|^2$.

יש המקצרים וכותבים $|\underline{a}|^2 = \underline{a}^2$. מכאן: $|\underline{a}| = \sqrt{\underline{a}^2}$.

10. $|\underline{a}| = \sqrt{\underline{a}^2}$. האם פעולת השורש ופעולת העלאה בריבוע מבטלות זו את זו וניתן לומר: $|\underline{a}| = \underline{a}$



11. הוכיחו באמצעות וקטורים את משפט הקוסינוסים.

♦ לפי חוק סכום אפס: $\underline{c} = \_\_ - \_\_ \leftarrow |\underline{c}|^2 = |\_\_ - \_\_|^2$

$|\underline{a} - \underline{b}|^2 = \_\_\cdot\_\_ + \_\_\cdot\_\_ - 2\cdot\ \_\_\cdot\_\_$

$\underline{a}\cdot\underline{a} = |\underline{a}|^2$

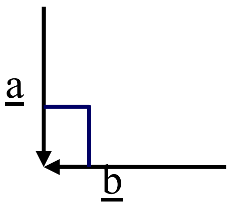
$\underline{b}\cdot\_\_ = |\_\_|^2$

$\underline{a}\cdot\_\_ = 2\cdot|\_\_|\cdot|\_\_|\cdot\_\_\_\_$

נציב ונקבל: $|\underline{a} - \underline{b}|^2 = |\_\_|\_\cdot|\_\_|\_ - 2\cdot\ \_\_\cdot\_\_\cdot\_\_\_\_\_ \leftarrow$

$|\underline{c}|^2 = |\_\_|\_\cdot|\_\_|\_ - 2\cdot\ \_\_\cdot\_\_\cdot\_\_\_\_\_$ מ.ש.ל.

משפט: המכפלה הסקלרית של שני וקטורים המאונכים זה לזה שווה אפס.



♦ נתון: _______

♦ צ.ל.: __________

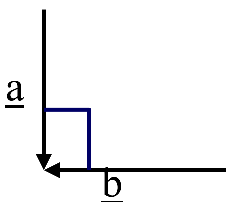
♦ הוכחה: 1. $\underline{a}\ \_\_\ \underline{b}$ ___________

2. $\underline{a}\cdot\underline{b} = \_\_\cdot\_\_\cdot\_\_\_$

3. $\cos 90^0 = \_\_\_$

4. $\underline{a}\cdot\underline{b} = \_\_\cdot\_\_\cdot\_\_\_ = \_\_$ מ.של.

משפט הפוך: אם $a \neq 0$ ו $b \neq 0$ ו $a\cdot b = 0$, אז $a \perp b$.



♦ נתון: _______

♦ צ.ל.: __________

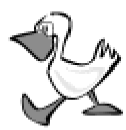
♦ הוכחה: 1. $\underline{a}\cdot\underline{b} = \_\_$ ___________

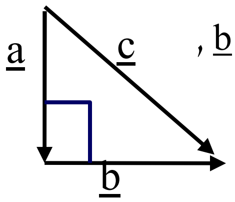
2. $\underline{a}\cdot\underline{b} = \_\_\cdot\_\_\cdot\_\_\_$

3. _______ _________

4. ____________________

5. ____________________ מ.של.



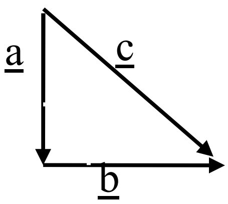


משפט פיתגורס: משולש ישר זווית שניצביו הם הווקטורים $\underline{a}$ ו $\underline{b}$,
והיתר היא הווקטור $\underline{c}$, מתקיים: $|\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2 = |\underline{c}|^2$.

- נתון: _____
- צ.ל.: _______
- הוכחה: 1. $\underline{c}$ = __________ ____________________________

2. $|\underline{a} + \underline{b}|^2$ = ___ + _________ + ___

מ.ש.ל.



משפט הפוך למשפט פיתגורס: אם במשולש שצלעותיו הם הווקטורים $\underline{a}$, $\underline{b}$, ו $\underline{c}$,
מתקיים: $|\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2 = |\underline{c}|^2$ אז המשולש הוא ישר זווית.

- נתון: ___________
- צ.ל.: ___________
- הוכחה: 1. $\underline{c}$ = ___________ ____________________________

2. $|\underline{a} + \underline{b}|^2$ = ___ + _________ + ___ ____________________________

3. ______________________ מהנתון.

4. ______________________ ______________________

מ.ש.ל

מאגר תשובות 1. 7.5 2. ‎-7.5 3. 7.5 5. 0^0 6. 3 7. ‎-16 8. $\sqrt{7}$ 10. לא מבטלות. התשובה להעלאה בריבוע היא מספר ורק ממנו ניתן להוציא שורש.
התשובה לאורך וקטור היא מספר (סקלר).

עבודה נעימה

מה בתמונה ?