וקטורים אלגבריים – מכפלה סקלרית

☺ איך כופלים וקטור בווקטור בגישה האלגברית?

דו ממדי	תלת ממדי
$\underline{a} = (a_1,a_2)$ $\underline{b} = (b_1,b_2)$	$\underline{a} = (a_1,a_2,a_3)$ $\underline{b} = (b_1,b_2,b_3)$
$\underline{a}\cdot\underline{b} = \_\_\cdot\_\_ + \_\_\cdot\_\_$	$\underline{a}\cdot\underline{b} = \_\_\cdot\_\_ + \_\_\cdot\_\_ + \_\_\cdot\_\_$

1. נתון: $\underline{b} = (1, -3, 2)$ $\underline{a} = (5, 0, -4)$. חשבו את ערך $\underline{a}\cdot\underline{b}$.

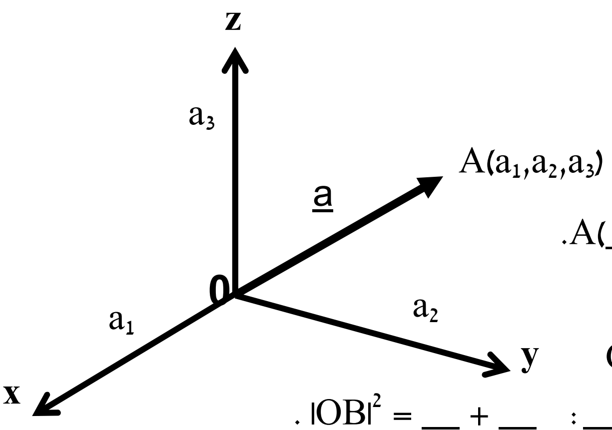
♦ $\underline{a}\cdot\underline{b} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_$

☺ בגישה הגיאומטרית ראינו: $|\underline{a}|^2 = \underline{a}\cdot\underline{a}$ ($|\underline{a}|$ - אורך הווקטור $|\underline{a}|$). האם גם בגישה האלגברית החוק הזה מתקיים?

♦ נראה לגבי תלת מימד: יהי $\underline{a} = (a_1,a_2,a_3)$. ←

$\underline{a}\cdot\underline{a} = (\_\_,\_\_,\_\_)\cdot(\_\_,\_\_,\_\_)$ ← $\underline{a}\cdot\underline{a} = \_\_\_\_ + \_\_\_\_ + \_\_\_\_$ ← $\underline{a}\cdot\underline{a} = \_\_ + \_\_ + \_\_$

♦ השאלה היא האם: $|\underline{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$?



בשרטוט משמאל יש מערכת צירים תלת ממדית

ובה הווקטור האלגברי $\underline{a}$.

זנב הווקטור $\underline{a}$ ב ______ וראשו בנקודה $A(\_\_,\_\_,\_\_)$.

נחשב את אורכו של $\underline{a}$, כלומר את $|\underline{a}|$.

הוסיפו לשרטוט את הנקודות $B(a_1,a_2,0)$ ו $C(a_1,0,0)$

משולש OBC ישר זווית, לכן לפי משפט _________: $|OB|^2 = \_\_ + \_\_$.

משולש OAB ישר זווית, לכן לפי משפט _________: $|OA|^2 = \_\_ + \_\_ + \_\_\_$

← $|\underline{a}|^2 = \_\_^2 + \_\_\_ + \_\_\_$

נפלא.

♦ למדנו לכפול שני וקטורים זה בזה כאשר הווקטורים מופיעים בהצגה אלגברית.

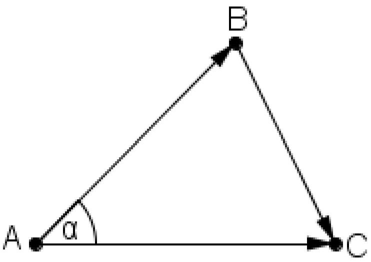
♦ למדנו לכפול שני וקטורים זה בזה כאשר הווקטורים מופיעים בהצגה גיאומטרית.

♦ נציג שאלה מעניינת....

☺ נתונים הווקטורים $\underline{b}=(b_1,b_2,b_3)$ $\underline{a}=(a_1,a_2,a_3)$. תהי α הזווית בין שני הווקטורים.

בהצגה גיאומטרית ______________ = $\underline{a}\cdot\underline{b}$. בהצגה אלגברית: ______________ = $\underline{a}\cdot\underline{b}$.

האם תוצאת המכפלה תהיה שווה אם נכפול את הווקטורים לפי שתי הגדרות?



♦ נסמן: $\overrightarrow{AC}=\underline{b}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{a}$. ← $\overrightarrow{BC}=$ _____

שיעורי $\overrightarrow{BC}$ הם: $\overrightarrow{BC}=(\_\_-\_\_,\_\_-\_\_,\_\_-\_\_)$

♦ נבטא את אורכי הווקטורים באמצעות השיעורים שלהם:

$|\underline{a}|^2=\_\_+\_\_+\_\_$, $|\underline{b}|^2=\_\_+\_\_+\_\_$

ו $|\overrightarrow{BC}|^2=|\underline{b}-\underline{a}|^2=(\_\_-\_\_)^2+(\_\_-\_\_)^2+(\_\_-\_\_)^2$ (הוכחנו נכונות בדף קודם).

♦ לפי משפט הקוסינוסים במשולש ABC: $|\overrightarrow{BC}|^2=|\_\_|^2+|\_\_|^2-2\cdot|\_|\cdot|\_|\cdot\cos\alpha$

♦ מכאן: $|\overrightarrow{BC}|^2=|\underline{b}-\underline{a}|^2$

לפי הגדרה אלגברית

לפי משפט הקוסינוסים

♦ בשל השוויון מתקבלת המשוואה:

________________________________ = ________________________________

♦ נפתח סוגריים ונצמצם בשני האגפים. נקבל: _______________ = ______________

אגף ימין שווה ל $\underline{a}\cdot\underline{b}$ לפי הגדרה _________ .

אגף שמאל שווה ל $\underline{a}\cdot\underline{b}$ לפי הגדרה _______. ושני האגפים שווים זה לזה.

☺ בתרגילים הבאים נשלב בין הגדרת מכפלה סקלרית בהצגה גיאומטרית והגדרת מכפלה סקלרית בצורה האלגברית.

למדנו ש: $\underline{a}\cdot\underline{b}=|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|\cdot\cos\alpha$ ← $\cos\alpha=\dfrac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|}$ כאשר α היא הזווית שבין $\underline{a}$ ל $\underline{b}$.

2. מצאו וקטור המאונך לוקטורים: (3,4,0) , (1,2,2).

- יהי (a,b,c) הווקטור המבוקש.

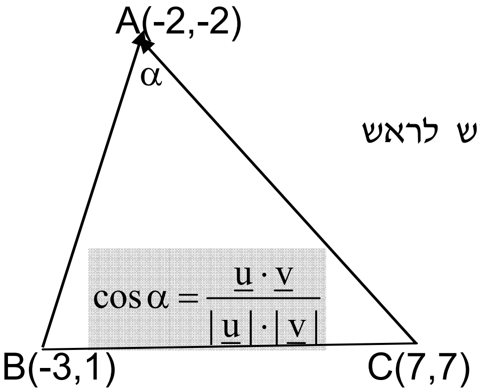
  1. $0 = (\_\_,\_\_,\_\_)\cdot(\_\_,\_\_,\_\_)$ לכן $0 = \_\_ + \_\_ + \_\_$
  2. $0 = (\_\_,\_\_,\_\_)\cdot(\_\_,\_\_,\_\_)$ לכן $0 = \_\_ + \_\_$

  ____

- קיבלנו שתי משוואות ב______ נעלמים. נציב במשוואה השנייה $a = 4$. ←
  $b = \_\_\_$, $c = \_\_$ ← הווקטור המבוקש הוא $(\_\_,\_\_,\_\_)$.
- לו בחרנו בערך שונה ל a, היינו מקבלים וקטור שונה בתשובה. נכון / לא נכון.
- כל וקטור שהיינו מקבלים היה תלוי בווקטור התשובה שקיבלנו. נכון / לא נכון.

3. נתונות הנקודות: $A(-2,-2)$, $B(-3,1)$, $C(7,7)$.
   א. הוכח שהנקודות יוצרות משולש.
   ב. מצא את זוויות המשולש.

- א. נוכיח בדרך השלילה.אם הווקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו $\overrightarrow{AC}$ יהיו על אותו הישר, הם יהיו תלויים זה בזה. $\overrightarrow{AB} = \_\_ - \_\_ = (\_\_.\_\_)$, $\overrightarrow{AC} = \_\_ - \_\_ = (\_\_.\_\_)$
  הווקטורים ___ , ____ ________________ לכן ________________
- ב. הזוויות בין הווקטורים (הזווית בין וקטורים היא הזווית שבין __________ או __________.



- נסמן $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$.
  בחישוב הזווית יש לבנות את הווקטורים בהתאם (ראש לראש או זנב לזנב).
- חישוב $\cos\alpha$: ← $\alpha = \_\_\_$
- חישוב $\cos\beta$: ← $\beta = \_\_\_$
- חישוב $\cos\gamma$: ← $\gamma = \_\_\_$

☑ מאגר תשובות 1. ‎-3 2. (1 , ‎-3 , 4). נכון. נכון
3. $\alpha = 63.43^0$, $\beta = 102.52^0$, $\gamma = 14.05^0$

עבודה נעימה